KIT Karlsruhe Institute of Technology
Fakultät für Informatik
Übungen zu Kognitive Systeme
Sommersemester 2017

M. Sperber (matthias.sperber@kit.edu)
T. S. Nguyen (thai.nguyen@kit.edu)
Y. Azad (yoo-jin.jeong@kit.edu)
D. Reichard (daniel.reichard@kit.edu)

Musterlösung zu Übungsblatt 4

Grundlagen der Bildverarbeitung

Aufgabe 1 – Farbmodell

RGB: $(70, 100, 180)$

Hue:

$$
\begin{aligned}
c &= cos^{-1}\left(\frac{2R - G - B}{2\sqrt{(R-G)^2 + (R-B)(G-B)}}\right) \\
&= cos^{-1}\left(\frac{140 - 100 - 180}{2\sqrt{(70-100)^2 + (70-180)(100-180)}}\right) \\
&= cos^{-1}\left(\frac{-140}{2\sqrt{900 + 8800}}\right) \\
&\approx cos^{-1}(-0.71074) \\
&\approx 135,3^\circ \\
H &= 360^\circ - c \approx 224.7^\circ \text{ , da } B \geq G
\end{aligned}
$$

Saturation:

$$
\begin{aligned}
S &= 1 - \frac{3}{R+G+B} \cdot min(R,G,B) \\
&= 1 - \frac{3}{70+100+180} \cdot 70 \\
&= 1 - \frac{210}{350} \\
&\approx 0,4
\end{aligned}
$$

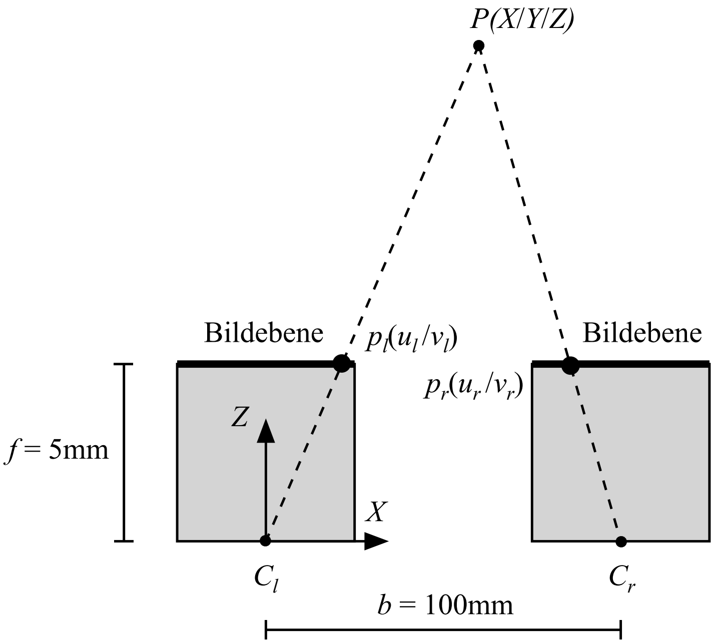
Intensity:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{R+G+B}{3} \\
&= \frac{350}{3} \\
&\approx 116,7
\end{aligned}
$$

Onlinefrage Nr. 1:
Der Hue-Wert beträgt ungefähr $224,7°$***.***

Aufgabe 2 – Lochkameramodell

2.a



Ein Pixel ist $\frac{3\text{ mm}}{750} = \frac{4\text{ mm}}{1000} = 0,004$mm hoch und breit ⇒ Umrechnungsfaktor ist $\frac{1}{0,004}\frac{Pixel}{\text{mm}} = 250\frac{Pixel}{\text{mm}}$.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{f}{Z}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{5\text{ mm}}{750\text{ mm}}\begin{pmatrix} 84\text{ mm} \\ 48\text{ mm} \end{pmatrix} = \frac{5\text{ mm}}{750}\begin{pmatrix} 84 \\ 48 \end{pmatrix} = \frac{1250\text{ Pixel}}{750}\begin{pmatrix} 84 \\ 48 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{5\text{ Pixel}}{3}\begin{pmatrix} 84 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140\text{ Pixel} \\ 80\text{ Pixel} \end{pmatrix}$$

2.b

$$g_l : \vec{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{Z}{f}\begin{pmatrix} u_l \\ v_l \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \end{pmatrix} = \frac{Z}{f}\begin{pmatrix} u_l \\ v_l \\ f \end{pmatrix} = \frac{Z}{5\text{ mm}}\begin{pmatrix} 40\text{ Pixel} \\ -100\text{ Pixel} \\ 5\text{ mm} \end{pmatrix} = \frac{Z}{5\text{ mm}}\begin{pmatrix} 0,16\text{ mm} \\ -0,4\text{ mm} \\ 5\text{ mm} \end{pmatrix}$$
$$= Z\begin{pmatrix} 0,032\text{ mm} \\ -0,08\text{ mm} \\ 1\text{ mm} \end{pmatrix}$$

$$g_r : \vec{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{Z}{f} \begin{pmatrix} u_r \\ v_r \\ f \end{pmatrix} = \frac{Z}{5\text{ mm}} \begin{pmatrix} -20\text{ Pixel} \\ -100\text{ Pixel} \\ 5\text{ mm} \end{pmatrix} = \frac{Z}{5\text{ mm}} \begin{pmatrix} -0,08\text{ mm} \\ -0,4\text{ mm} \\ 5\text{ mm} \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} -0,016\text{ mm} \\ -0,08\text{ mm} \\ 1\text{ mm} \end{pmatrix}$$

2.c

Im Folgenden wird die Einheit [mm] der Einfachheit wegen weggelassen. g_l ist schon im Weltkoordinatensystem definiert, da das Koordinatensystem der linken Kamera mit dem Weltkoordinatensystem identisch ist. Also:

$$g_l = \lambda \begin{pmatrix} 0,032 \\ -0,08 \\ 1 \end{pmatrix}$$

g_r muss ins Weltkoordinatensystem transformiert werden. Die Orientierung bleibt dabei unverändert, aber es ist eine translative Koordinatentransformation notwendig, um die Verschiebung relativ zur linken Kamera zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \vec{x} \to \vec{x} &+ \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist g_r im Weltkoordinatensystem:

$$g_r : \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -0,016 \\ -0,08 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der im Weltkoordinatensystem definierten Geraden g_l und g_r ergibt:

$$\lambda \begin{pmatrix} 0,032 \\ -0,08 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -0,016 \\ -0,08 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich $\lambda = \mu$, daraus $0,032\lambda = 100 - 0,016\lambda \Rightarrow 0,048\lambda = 100 \Rightarrow \lambda \approx 2083,3$, und somit:

$$S = \begin{pmatrix} 66,7 \\ -166,7 \\ 2083,3 \end{pmatrix}$$

Onlinefrage Nr. 2:
Die Koordinaten des Punktes S aus Aufgabe 2.c lauten $(66,7\text{ mm} \,/\, -166,7\text{ mm} \,/\, 2083,3\text{ mm})$***.***

2.d

Dies hat zur Folge, dass sich die Geraden g_l' und g_r nicht exakt in einem Punkt schneiden, sondern windschief sind. Der optimale Schnittpunkt S' kann beispielsweise entweder als Mittelpunkt der kürzesten Verbindungsstrecke zweier windschiefer Geraden berechnet werden oder über die Lösung eines überbestimmten LGS. Letztere Variante wird im Folgenden vorgerechnet. Gegeben seien allgemein zwei Geraden g_l und g_r:

$$\begin{aligned} g_l &: \vec{x} = \vec{a} + r\vec{u} \\ g_r &: \vec{x} = \vec{b} + s\vec{v} \end{aligned}$$

Gleichsetzen von g_l und g_r ergibt:

$$r\vec{u} - s\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 & -v_1 \\ u_2 & -v_2 \\ u_3 & -v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \vec{b} - \vec{a}$$

Mit

$$A := \begin{pmatrix} u_1 & -v_1 \\ u_2 & -v_2 \\ u_3 & -v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := \vec{b} - \vec{a}$$

ist $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein überbestimmtes LGS, dessen optimale Lösung $\mathbf{x}^*$ im Sinne der euklidischen Norm beispielsweise durch Lösung der Normalengleichung $A^T A\mathbf{x}^* = A^T\mathbf{b}$ zu

$$\mathbf{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$$

berechnet werden kann (numerisch stabilere Lösungsverfahren basieren auf der Singulärwertzerlegung oder QR-Zerlegung). Mit $(r^*, s^*) := \mathbf{x}^*$ lässt sich der Punkt mit dem geringsten Abstand zu beiden Geraden berechnen zu:

$$\mathbf{s}' = \frac{\mathbf{a} + r^* \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b} + s^* \cdot \mathbf{v}}{2}$$

Aufgabe 3 – Kontrastanpassung

3.a

Da sowohl die Intensität 0 als auch 255 vorhanden sind, verändert die Spreizung das Bild nicht. Es gilt also $B' = B$.

3.b

Das Histogramm $H(x)$ mit $H : \{0, ..., 255\} \to \mathbb{Z}$ lautet:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 2 & x = 80 \\ 2 & x = 110 \\ 4 & x = 140 \\ 2 & x = 180 \\ 1 & x = 255 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für das akkumulierte Histogramm $H_a(x)$ gilt:

$$H_a(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 79 \\ 3 & 80 \leq x \leq 109 \\ 5 & 110 \leq x \leq 139 \\ 9 & 140 \leq x \leq 179 \\ 11 & 180 \leq x \leq 254 \\ 12 & x = 255 \end{cases}$$

Das 0,1-Quantil berechnet sich zu $H_q(0{,}1) = 80$ und das 0,9-Quantil zu $H_q(0{,}9) = 180$. Die Parameter der affinen Punktoperation $I'(u,v) = aI(u,v) + b$ sind also $a = \frac{255}{180-80} = 2,55$ und $b = -\frac{255\cdot 80}{180-80} = -204$. Damit ergibt sich die folgende neue Bildmatrix B':

$$B' = \begin{pmatrix} 77 & 153 & 153 & 255 \\ 0 & 0 & 153 & 255 \\ 0 & 255 & 77 & 153 \end{pmatrix}$$

Onlinefrage Nr. 3:
Die Summe aller Einträge der neuen Bildmatrix beträgt 1531***.***

3.c

Es gilt $H_n(x) = \frac{255}{12} \cdot H_a(x)$. Anwendung von $H_n(x)$ ergibt die neue Bildmatrix B':

$$B' = \begin{pmatrix} 106 & 191 & 191 & 255 \\ 64 & 64 & 191 & 234 \\ 21 & 234 & 106 & 191 \end{pmatrix}$$

Onlinefrage Nr. 4:
Die Summe aller Einträge der neuen Bildmatrix beträgt 1848***.***

Aufgabe 4 – Filter

4.a

Die Formel zur Berechnung des Gauß-Filters lautet:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Als Abschätzung für die Filtergröße ergibt sich: $n = \lfloor 2 \cdot 0.85 \rfloor \cdot 2 + 1 = 3$, d.h. $x, y \leq 1$. Es ergibt sich somit die folgende Filtermatrix:

$$\begin{pmatrix} 0.0552 & 0.1103 & 0.0552 \\ 0.1103 & 0.2203 & 0.1103 \\ 0.0552 & 0.1103 & 0.0552 \end{pmatrix}$$

Für den zentralen Eintrag ergibt sich im Vergleich zur gegebenen Filtermatrix der Faktor $\frac{4}{0.2203} \approx 18.16$, und es gilt $0.0552 \cdot 18.12 \approx 1$ sowie $0.1103 \cdot 18.12 \approx 2$.

Bei einem Tiefpassfilter muss die Summe der Einträge 1 betragen, und es gilt $4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 16$. Es gilt zu beachten, dass in der oben berechneten Filtermatrix die Summe der Einträge einen Wert < 1 besitzt; bei unendlicher Fortsetzung würde die Summe 1 betragen.

4.b

$$B' = \begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & 20 & 20 & 28 & 43 & 50 & 43 & 28 & 20 & 20 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

4.c

Durch Faltung mit dem Sobel$_x$-Filter ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & 32 & 92 & 88 & 0 & -88 & -92 & -32 & .. & .. \\ .. & .. & 32 & 92 & 88 & 0 & -88 & -92 & -32 & .. & .. \\ .. & .. & 32 & 92 & 88 & 0 & -88 & -92 & -32 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

4.d

Durch Faltung mit dem Sobel$_y$-Filter ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & .. \\ .. & .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & .. \\ .. & .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Onlinefrage Nr. 5:
Der betraglich größte Eintrag der neuen Bildmatrix ist* 92*.